Théorème de Hadamard-Lévy (cas C^2)

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 204 : Connexité. Exemples et applications.
- 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
- 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$*
2. *f est propre et $\mathrm{d}f(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve : Si f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ alors f est propre car f^{-1} est continue (donc pour tout compact K, $f^{-1}(K)$ est compact) et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \mathrm{d}f^{-1}(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{id}$$

donc $\mathrm{d}f(x)$ est inversible.

Passons au sens réciproque, supposons f est propre et $\mathrm{d}f(x)$ inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrons que f est bijective. Quitte à considérer $x \mapsto f(x) - a$ pour $a \in \mathbb{R}^n$ il suffit de montrer que l'ensemble $S := f^{-1}(\{0\})$ est de cardinal 1.

Étape 1 : Cherchons un flot sur lequel f décroit vers 0

Soit

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & -\mathrm{d}f(x)^{-1} \cdot f(x) \end{array}$$

F est de classe C^1 car $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = F(y) \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$ admet donc une unique solution maximale noté $\varphi^t(x)$ sur un intervalle de la forme $]T_-, T_+[$ contenant 0 d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,

Posons

$$\begin{array}{rccc} g & : & [0, T_+[& \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \mapsto & f \circ \varphi^t(x) \end{array}$$

g est de classe C^1 et

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, T_+[, g'(t) &= \mathrm{d}f(\varphi^t(x)) \cdot \partial_t \varphi^t(x) \\ &= \mathrm{d}f(\varphi^t(x)) \cdot [(-\mathrm{d}f(\varphi^t(x)))^{-1} \cdot f(\varphi^t(x))] \\ &= -g(t)\end{aligned}$$

d'où comme $g(0) = f(x)$, on a

$$\forall t \in [0, T_+[, f(\varphi^t(x)) = e^{-t} f(x)$$

Donc $\varphi^t(x) \in f^{-1}(\overline{\mathrm{B}}(0, ||f(x)||))$ compact car f est une application propre.
D'après le lemme de sortie de tout compact, φ est une solution globale donc $T_+ = +\infty$.

Remarque 1. On observe que S est l'ensemble des points d'équilibre du système différentiel autonome. Montrons dans les étapes 2 et 3 que les points d'équilibres sont asymptotiquement stables.

Étape 2 : Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in S$ et $\mathcal{U}_y$ un voisinage de y dans $\mathbb{R}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi^{t_0}(x) \in \mathcal{U}_y$

La suite $(\varphi^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $f^{-1}(\overline{\mathrm{B}}(0, ||f(x)||))$ donc admet une valeur d'adhérence : il existe une sous-suite (n_k) et $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi^{n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ avec

$$f(y) = \lim_{k\to+\infty} f(\varphi^{n_k}(x)) = \lim_{k\to+\infty} e^{-n_k} f(x) = 0$$

donc $y \in S$.

Remarque 2. On a $\#S \geq 1$ et f est surjective.

Soit $\mathcal{U}_y$ un voisinage de y dans $\mathbb{R}^n$ et $B_y = B(0, \delta_y)$ tel que f soit un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}_y$ sur B_y. D'après ce qui précède, il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi^{t_0}(x) \in \mathcal{U}_y$.

Étape 3 : Montrons qu'alors $\forall t \geq t_0, \varphi^t(x) \in \mathcal{U}_y$

On a

$$\underbrace{\{t \in [t_0, +\infty[, \varphi^t(x) \in \mathcal{U}_y\}}_{\substack{=\varphi^{\cdot}(x)^{-1}(\mathcal{U}_y)\cap[t_0,+\infty[\\ \text{ouvert de } [t_0,+\infty[}} = \underbrace{\{t \in [t_0, +\infty[, \varphi^t(x) = f^{-1}_{|\mathcal{U}_y}(e^{-t} f(x))\}}_{\text{fermé de } [t_0,+\infty[}$$

En effet,
($\supset$) par définition.
($\subset$) $f(\varphi^{t_0}(x)) = e^{-t_0} f(x) \in B_y$ et la norme décroit lorsque t croit et en appliquant $f^{-1}_{|\mathcal{U}_y}$ et on obtient l'inclusion.
Par connexité, on a donc $\{t \in [t_0, +\infty[, \varphi^t(x) \in \mathcal{U}_y\} = [t_0, +\infty[$ donc pour tout $t \geq t_0, \varphi^t(x) \in \mathcal{U}_y$ et $\varphi^t(x) = f^{-1}_{|\mathcal{U}_y}(\underbrace{e^{-t} f(x)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0})$ donc $\varphi^t(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} y$.

Étape 4 : On conclut par un argument de connexité

Soit $W_y = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi^t(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} y\}$.
On a d'après précedemment, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y\in f^{-1}(\{0\})} W_y$.

Or, $W_y = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \left(\varphi^t\right)^{-1}(\mathcal{U}_y)$,
En effet,
($\subset$) Si $x \in W_y$, $\varphi^t(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} y$ donc $\exists t \in \mathbb{R}, \varphi^t(x) \in \mathcal{U}_y, x \in (\varphi^t)^{-1}(\mathcal{U}_y)$.
($\supset$) S'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi^{t_0}(x) \in \mathcal{U}_y$, on a d'après ce qui précède $\varphi^t(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. D'où W_y est ouvert en tant qu'union quelconque d'ouverts (par continuité de $x \mapsto \varphi^t(x)$) comme les W_y sont disjoints, par connexité de $\mathbb{R}^n$, on a $\#S = 1$ donc f est bijective. $\square$